



**Concursul Interdisciplinar „Vrănceanu-Procopiu”**

**Etapă județeană, județul Brașov**

**Problema 1**

Reducem numitorii și inegalitatea devine  $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq a^2bc + ab^2c + abc^2$   
.....(2p)

Notăm  $ab = x, bc = y, ca = z$ ,.....(1p)  
Inegalitatea devine

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \iff (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$$

.....(4p)

Are loc egalitatea dacă  $x = y = z \Rightarrow a = b = c$ .  
.....(2p)

Se acordă 1p oficiu.

**Problema 2**

Din teorema bisectoarei avem  $\frac{EA}{EC} = \frac{MA}{MC}, \frac{DB}{DA} = \frac{MB}{MA}$ .....(2p)

Din teorema lui Menelaos în triunghiul ADC, cu transversala B-I-E, obținem

$$\frac{BA}{BD} \cdot \frac{ID}{IC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$$

.....(2p)

Deducem

$$\frac{ID}{IC} = \frac{EA}{EC} \cdot \frac{BD}{BA}$$

.....(1p)

În triunghiul BDC,  $M \in (BC), I \in (CD), A \in (DB)$  și

$$\frac{MC}{MB} \cdot \frac{ID}{IC} \cdot \frac{AB}{AD} = \frac{MC}{MB} \cdot \frac{EA}{EC} \cdot \frac{BD}{BA} \cdot \frac{AB}{AD} = \frac{MC}{MB} \cdot \frac{MA}{MC} \cdot \frac{MB}{MA} = 1$$

.....(3p)

Din reciproca teoremei lui Menelaos, punctele A, I, M sunt coliniare.....(1p)

Se acordă 1p oficiu.